

Regge 极点与 $\pi-N$ 散射 $T = \frac{3}{2}$, $l = \frac{3}{2}$ P-波相移

罗蓓玲 李華鍾

(物理系)

§ 1

在 Khuri 的最近的一篇文献⁽¹⁾中指出, 散射振幅 $f(s, z)$ 的 Regge 表示中的每一項, 在 z 平面上的割綫起点, 同 $f(s, z)$ 的 z 割綫起点不符合, 这意味着在极点項和背景項之間还存在着某种抵消; 这样, Regge 表示的极点項, 并不完全反映 Regge 极点的全部貢獻, 因此他建議一个新的表示形式, 其中每一項的 z 平面解析性都同 $f(s, z)$ 的 z 解析性相符。Khuri 的工作还表明, 在某些特殊类型的势散射情况下, 可以論証: 新的表示 (Regge-Khuri 表示) 的背景項很可能只由 λ 左半平面 ($\lambda = l + \frac{1}{2}$) 的奇异性所决定, 而与右半平面的 Regge 极点无关。此外, 在低能区域, 即当 s 并不很大时, 左半面的极点早已离开任何物理的 l 值頗远, 新表示背景項的貢獻很小, 这样, Regge-Khuri 表示提供了一个新的可能性: 在低能下也可以用少数几个极点項来近似表达散射振幅。例如引入在 l 平面上的“邻域近似” (Near-by Singularity Approximation) 的概念是有意义的。如討論物理值 l 分波, 則只有那些在所研究的能量区域内仍然留在 l 附近較近的 Regge 极点才有主要的貢獻。

Khuri 的想法在理論上未能确切証明, 对相对論性散射振幅而言, 这些推測更难証实, 因此可以考虑直接計算一些具体振幅, 而同实验比較。Khuri-Udgaonkar⁽²⁾ 計算了 $J = \frac{1}{2}$, $T = \frac{1}{2} \pi N$ 散射 p 波相移, 假定低能下只有一个 Regge 极点項, (核子所在的 Regge 极迹) 有貢獻, 在此簡單近似所得結果, 比之过去的計算都同实验結果更为接近。这結論是頗为令人滿意的。

本文应用 Regge-Khuri 表示, 假設在閾以上直至共振上的低能区域内, $T = \frac{3}{2}$, $J = \frac{3}{2}$ P 波振幅的主要貢獻来自 N_{33}^* 所在的 Regge 极迹, 計算了 $\pi-N$ 散射 δ_{33} 。

与此同时,先后有两篇文章^{[3][4]}也是用 Regge - Khuri 表示研究了同一問題,但是,本文作者认为,我們的工作并不是多余的。我們指出,文献[3]中所作的近似,使近似分波振幅的閾行为同么正条件的要求偏差頗大,我們所用的近似分波振幅的閾行为十分接近么正条件的要求。計算表明虽然 δ_{33} 对这閾行为不是十分灵敏,但肯定地仍是有意义的,我們的計算結果較之文献[3]更符合实验。文献[4]则还有一个根本的錯誤,該文作者誤把玻色子 Regge 极点的閾行为搬到費米子 Regge 极迹来,于是他們所用的 $Im\alpha(w)$ 閾行为是錯誤的,在閾附近 $Im\alpha$ 有一个可調甘的参数 α_0 ($w=M+\mu$ 时 α 之值),如令 α_0 能滿足正确的行为,則此 α_0 同他們所設的 $Re\alpha$ 式子自相矛盾。上述一切将在下文具体分析。

§ 2

$\pi-N$ 散射泡利振幅的 Regge 表示^[5]可写成:

$$\begin{aligned} f_{1,2}(w, z) = & \pm \frac{i}{4} \int_c \frac{dJ}{\cos\pi J} f_{J-\frac{1}{2}, J-\frac{1}{2}}^{J, (e)}(w) \left[P'_{J\pm\frac{1}{2}}(-z) \pm P'_{J\pm\frac{1}{2}}(z) \right] + \\ & \pm \frac{i}{4} \int_c \frac{dJ}{\cos\pi J} f_{J-\frac{1}{2}, J-\frac{1}{2}}^{J, (o)}(w) \left[P'_{J\pm\frac{1}{2}}(-z) \mp P'_{J\pm\frac{1}{2}}(z) \right] + \\ & \mp \frac{i}{4} \int_c \frac{dJ}{\cos\pi J} f_{J+\frac{1}{2}, J+\frac{1}{2}}^{J, (e)}(w) \left[P'_{J\mp\frac{1}{2}}(-z) \mp P'_{J\mp\frac{1}{2}}(z) \right] + \\ & \pm \frac{i}{4} \int_c \frac{dJ}{\cos\pi J} f_{J+\frac{1}{2}, J+\frac{1}{2}}^{J, (o)}(w) \left[P'_{J\mp\frac{1}{2}}(-z) \pm P'_{J\mp\frac{1}{2}}(z) \right] \quad (1) \end{aligned}$$

上式中上行符号相应于 f_1 ,下行符号相应于 f_2 , W 是质心系中 πN 的能量, $z = \cos\theta$, θ 为质心系中的散射角,积分迴路 C 是通常 Sommerfeld-Watson 变换中繞着复 J 平面实軸的迴路, (e), (o) 分別表偶或奇 J -宇称,

我們考虑物理值 j 的分波投射

$$f_{j-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^j = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz \left[P_{j-\frac{1}{2}}(z) f_1(z) + P_{j+\frac{1}{2}}(z) f_2(z) \right] \quad (2)$$

$T = \frac{3}{2}$, $j = \frac{3}{2}$, $l = j - \frac{1}{2} = 1$ 的振幅其 J -宇称为奇,在(1)中只有含

$f_{J-\frac{1}{2}, J-\frac{1}{2}}^{J, (o)}$ (w) 的一项有贡献,故可簡写为

$$f_{j-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{j, (o)}(w) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz \left[P_{j-\frac{1}{2}}(z) \tilde{f}_1(w, z) + P_{j+\frac{1}{2}}(z) \tilde{f}_2(w, z) \right] \quad (3)$$

$$\tilde{f}_{1,2}(w, z) = \pm \frac{i}{4} \int_c \frac{dJ}{\cos \pi J} f_{J-\frac{1}{2}, J-\frac{1}{2}}^{J, (0)}(w) \left[P'_{J \pm \frac{1}{2}}(-z) \mp P'_{J \pm \frac{1}{2}}(z) \right] \quad (4)$$

把(4)式的积分作出, 并利用

$$-\frac{\pi P'_{\lambda-\frac{1}{2}}(z)}{\cos \pi \lambda} = \frac{1}{(2)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda x}}{(chx+z)^{3/2}} dx \quad (5)$$

仿照文献(1)的作法可得相应的Regge-Khuri表示

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1,2}(w, z) = & \mp \sum_n R_1(W, z; J_n \pm \frac{1}{2}) \pm \sum_n R_2(W, z; J_n \pm \frac{1}{2}) + \\ & + \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_{\xi_1}^{\infty} \frac{B_{L1}(x, w) dx}{(chx-z)^{3/2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_{\xi_2}^{\infty} \frac{B_{L2}(x, w) dx}{(chx+z)^{3/2}} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} R_1(w, z; J_n \pm \frac{1}{2}) = & \beta_n(w) \left\{ \frac{-\frac{1}{2}\pi(J_n \pm \frac{1}{2})P'_{J_n \pm \frac{1}{2}}(-z)}{\cos \pi[(J_n \pm \frac{1}{2})-\frac{1}{2}]} \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\xi_1} \frac{e^{[(J_n \pm \frac{1}{2})+\frac{1}{2}]x}}{(chx-z)^{3/2}} dx \right. \\ R_2(w, z; J_n \pm \frac{1}{2}) = & \beta_n(w) \left\{ \frac{-\frac{1}{2}\pi(J_n \pm \frac{1}{2})P'_{J_n \pm \frac{1}{2}}(z)}{\cos \pi[(J_n \pm \frac{1}{2})-\frac{1}{2}]} \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\xi_2} \frac{e^{[(J_n \pm \frac{1}{2})+\frac{1}{2}]x}}{(chx+z)^{3/2}} dx \right. \end{aligned} \quad (7)$$

$\beta_n(W)$ 是 $f_{J-\frac{1}{2}, J-\frac{1}{2}}^{J, (0)}(W)$ 在极点 $J=J_n(W)$ 的留数, ξ_1, ξ_2 定义为

$$\begin{aligned} ch\xi_1 = & 1 + \frac{2\mu^2}{q^2} \\ -ch\xi_2 = & \frac{W^2 - M^2 - 2\mu^2}{2q^2} - 1 \end{aligned} \quad (8)$$

μ 为 π 介子质量, M 为核子质量, q 为质心系中的动量, $B_{L1}(x, W), B_{L2}(x, W)$ 是背景项的未知函数。

现在我們假设对于 $T=3/2, J=3/2$ 的分波振幅, 在低能下只有一项极点项是主导的, 其余各项及背景项都可略去, 这主导的Regge极迹就是 N_{33}^* 所在的极迹, 把它记为 $\alpha(w)$,

$$\tilde{f}_{1,2}(w, Z) \approx \mp R_1(w, z, \alpha(w) \pm \frac{1}{2}) \pm R_2(w, z, \alpha(w) \pm \frac{1}{2}) \quad (9)$$

$$f_{1,2}^{3/2}(w) \equiv f_{1,2}^{3/2, (0)}(w)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz \left[P_1(z) \tilde{f}_1(w, z) + P_1(z) \tilde{f}_2(w, Z) \right] \quad (10)$$

(7), (9), (10)得

$$f_1^{3/2}(w) = \frac{-1}{2} \frac{\beta(w)}{\alpha(w) - \frac{3}{2}} \left[e^{[\alpha(w) - \frac{1}{2}]\xi_1} e^{-\xi_1} + e^{[\alpha(w) - \frac{1}{2}]\xi_2} e^{-\xi_2} \right] \quad (11)$$

已經證明, 不論對玻色子^{[6][7]}或是費米子^[8] Regge 極迹, 在閾附近^(*),

$$\beta(w) \simeq - \frac{Im\alpha(w)}{q} \quad (12)$$

成立。以此近似地代替(11)之 $\beta(w)$

由本文作者之一的前一工作^[8], 在閾附近^(**)

$$Im\alpha(w) \sim (q^2)^{\alpha_0}, \quad q^2 \rightarrow 0 \quad (13)$$

$\alpha_0 \equiv \alpha(w=M+\mu)$.

又容易證明

$$e^{\alpha(w)\xi_1} \sim (\frac{1}{4}q^2)^{-\alpha_0} \quad q^2 \rightarrow 0 \quad (14)$$

由(13)及(14)式:

$$[Im\alpha(w)] e^{\alpha(w)\xi_1} \sim C, \quad q^2 \rightarrow 0 \quad (15)$$

(C 是一常數, 如文獻^[2]一樣, (15)表明 $[Im\alpha(w)] e^{\alpha(w)\xi_1}$ 在閾附近是緩變的, 假設這可以近似地外推到閾上。

(12)–(15)式代入(11)式,

$$f_1^{3/2}(w) = \frac{-C}{2q \left[Re\alpha(w) - \frac{3}{2} + iC e^{-\alpha(w)\xi_1} \right]} \left\{ e^{-3/2\xi_1} + e^{[(\alpha-3/2)\xi_2 - \alpha\xi_1]} \right\} \quad (16)$$

設

$$Re(w) = \frac{3}{2} + \epsilon(w - M_{33}) \quad (17)$$

(•1) 文獻[6][7]證明對玻色子 Regge 極迹(12)在閾成立, 對於費米子 Regge 極迹, 在[8]已有系統的討論, 由[8]稍加一點推導便可得(12)在閾附近成立。注意由於分波振幅規一化因子不同(12)式同以上引文的公式差一個因子。

(•2) 文獻[4]假設 $Im\alpha = C_1[w - (M+\mu)]^{3/2}$, 並引用[7]的閾行為 $Im\alpha \simeq q^{2\alpha_0+1}$, $q \sim 0$ 他們以為他們假設的 $Im\alpha$ 有正確的閾行為。實際上文獻[7]是對玻色子 Regge 極迹而言的。對於費米子, 工作[8]指出 $Im\alpha \simeq q^{2\alpha_0}$, $q \sim 0$ 。其次, $Im\alpha = C_1[w - (M+\mu)]^{3/2} \sim q^3$, $q \sim 0$, 如要求它滿足正確的閾行為, 則 $\alpha_0 \simeq 3/2$, 於是(17)式導致 $\epsilon = 0$ 。顯然謬誤, 並同他們所用 $\epsilon = 0.4$ 矛盾。

$$\begin{aligned} \Gamma_{33} &= \frac{1}{M_{33}} \left[\frac{Im\alpha(w)}{\frac{d}{dw^2} Re\alpha(w)} \right]_{w=M_{33}} \\ &= 2C e^{-\frac{\alpha}{2}\xi_1^*} \end{aligned} \tag{18}$$

ξ_1^* 表 ξ_1 在 $w = M_{33}$ 时之值。

$$f_1^{3/2}(w) = - \frac{\Gamma_{33} e^{-\frac{\alpha}{2}(\xi_1^* - \xi_1)} \left[1 + e^{(\alpha - \frac{\alpha}{2})(\xi_2 - \xi_1)} \right]}{4q \left[w - M_{33} + i \frac{\Gamma_{33}}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}\xi_1^* - \alpha\xi_1} \right]} \tag{19}$$

最近的实验数据⁽⁹⁾

$$\left. \begin{aligned} M_{33} &= 8.86\mu \\ \Gamma_{33} &= 94 \pm 16 Mev \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

又由 $N_{37}^* : J = \frac{7^+}{2}, M_{37} = 13.8\mu (1920 Mev)$ 得

$$\epsilon = 0.41 \tag{21}$$

$$f_1^{3/2}(w) = - \frac{\Gamma_{33} e^{-\frac{\alpha}{2}(\xi_1^* - \xi_1)} \left[1 + e^{\epsilon(w - M_{33})(\xi_2 - \xi_1)} \right]}{4q \left[w - M_{33} + i \frac{\Gamma_{33}}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}(\xi_1^* - \xi_1) - \epsilon(w - M_{33})\xi_1} \right]} \tag{22}$$

上式中指数中的 $Im\alpha$ 略去，因其贡献甚小，粗略的估计⁽³⁾ $Im\alpha^* \approx 0.1$ ，* 表在共振之值，如在第一个共振以下 $Im\alpha$ 为单调上升，则 $Im\alpha < 0.1$ 。

令^(*3)

$$\sin\delta_{33} = |f_1^{3/2}(w)|q \tag{23}$$

(22) (23) 式可以立即进行数字计算

§ 3

计算结果如图 1 所示。

(*3) 文献[4]所定的 δ_{33} 为: $\delta_{33} = \tan^{-1} \left[\frac{Imf_1^{3/2}}{Ref_1^{3/2}} \right]$ ，他们宣称常数 C_1 可以消去，

实际上这方法也是有毛病的，他们所用的 δ_{33} 上式，只有当 $f_1^{3/2}$ 严格满足么正条件 $f_1^{3/2} = c e^{i\delta_{33}} \times \sin\delta_{33}/q$ 时才是对的，当近似的 $f_1^{3/2}$ 不满足么正条件，此时如令 $f_1^{3/2} = A_1 + iA_2$ ，则 $\tan\delta_{33} = \frac{A_2}{A_1}$ ， $\sin\delta_{33} = A_2/\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ ，另一方面 $= |f_1^{3/2}|^2 = \sin^2\delta_{33}/q^2$ ， $\sin\delta_{33} = q\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ 两种办法求得的 δ_{33} 不一致，（只有当 $f_1^{3/2}$ 满足么正条件时，两者一致。）

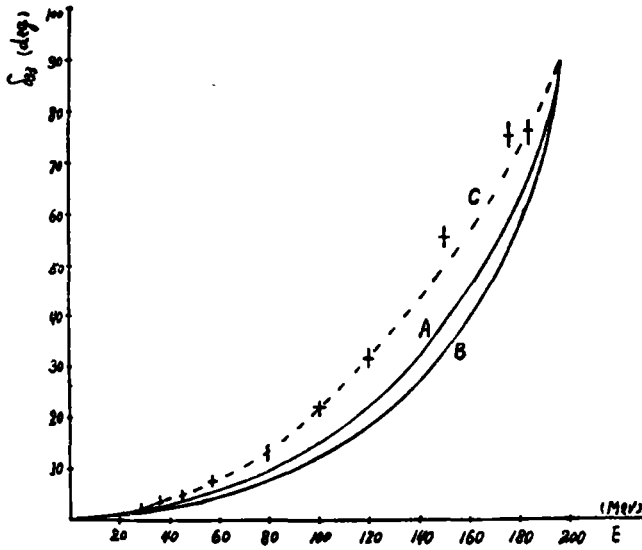


图 1

在图 1 中，实验数据(c)取自文献^[10]中的“表Ⅲ”。曲线(A)是本文公式计算所得，曲线(B)是按文献^[3]重算所得。在阈至 40MeV 附近一段，我们的结果同实验十分符合，这是由于我们采用为近似都有或者大致有正确的阈行为。40MeV 以上，本文的计算也比文献^[3]接近实验。

现考虑完全准确的分波振幅

$$F_1^{3/2} = \frac{e^{i\delta_{33}} \sin\delta_{33}}{q} \tag{24}$$

弹性么正条件

$$Im F_1^{3/2} = |F_1^{3/2}|^2 q \tag{25}$$

$$Im F_1^{3/2} \sim q^5, \quad q^2 \rightarrow 0 \tag{26}$$

这是么正条件要求的正确阈行为。

由(22)式，

$$Im f_1^{3/2} \sim q^{2(\alpha_0 + 1)}, \quad q^2 \rightarrow 0 \tag{27}$$

α_0 可由(17)估计

$$\alpha \approx 1.04 \tag{28}$$

$$Im f_1^{3/2} \sim q^{4.08}, \quad q^2 \rightarrow 0 \tag{29}$$

可见很接近于么正条件的要求,

由文献^[3]的近似分波振幅 $f_1^{3/2}$ 可得

$$\text{Im} f_1^{3/2} \sim q^2, \quad q^2 \sim 0 \quad (30)$$

同么正条件要求相去颇远。

由于本文所作的近似在阈以上是粗略的, 实验的 Γ_{33} 值也有百分之十几的误差, 所以同实验还有一定的偏离是意料中的, 但要注意到这个简单的一个 Regge 极点项近似在低能区域仍然如此有效。

物理上说, 我们的假设相当于在低能下, 强作用过程主要通过 s 道的一个 Regge 极点中间态。同高能情况对比, 众所周知, 现时大家接受的图象是, 高能振幅主要是由交叉道的 Regge 极点制约, 如果本文和^{[2][3]}等的图象在一般的低能过程成立, 则我们似乎对强作用过程的高低机构有一个颇为简明而和谐的图象。

最后, 我们强调指出, 这些计算都是唯象性质的, 对于用 Regge 语言表述的低能动力机构, 目前仍是一无所知, 用“连环套机构”(Bootstrap mechanism) 可以计算出 Γ_{33} 和 M_{33} , 这一点将是进一步的工作。

摘 要

本文应用 Khuri 所发展的散射振幅 Regge 表示的新形式, 计算了 π -N 散射 $T = \frac{3}{2} \quad J = \frac{3}{2}$ p-波散射相移; 假设了在阈以上直到共振附近止的低能范围内, $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ 共振所在的一条 Regge 极迹是上述分波振幅的主要贡献。与别的文献不同, 在计算中所作的近似, 仍能使近似分波振幅阈行为在很高程度上满足分波弹性么正条件。计算结果同实验符合得相当好。

参 考 文 献

- [1] Khuri, N.N. Phys. Rev. 130(1963), 429.
- [2] Khuri, N.N., Udgaonkar, B.M. Phys. Rev Letters 10(1963), 172.
- [3] Der-Sakissian, M. Nuovo Cimento 31(1964), 562.
- [4] Bose, S.K., Biswas, S.N. Phys. Rev. 133B(1964), 789.
- [5] Singh, V. Phys. Rev. 129(1963), 1889.
- [6] Грибов, В.Н., Померанчук, И.Я. ЖЭТФ 43(1962), 308.
- [7] Barut, A.O., Zwanziger, D.E. Phys. Rev. 127(1962), 974.

- [8] 李华鍾, “費米子Regge 极迹的解析性和閾行为” 中山大学学报 (自然科学) 1964年第3期。
- [9] Roos, M. Nucl. Phys. 52(1964), 1.
- [10] Hamilton, J., Woolcock, W.S. Rev. mod. Phys. 35, (1964), 737.

Regge Poles and $T = \frac{3}{2}$, $J = \frac{3}{2} \pi - N$ Scattering Phase - shift

Lo Bae-Ling Lee Hwa-chung

(Physics Department, Chung-Shan University)

《 abstract 》

The new form of Regge Representation of scattering amplitude developed recently by Khuri is applied to calculate $T = \frac{3}{2}$, $J = \frac{3}{2}$ p-wave π -N phase-shift at low energies. It is assumed that a single Regge-Khuri term with which the $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ resonance may be associated dominates the partial wave amplitude at low energies. In contrast to other literatures, elastic unitary condition is satisfied to a high degree near threshold in the present approximations. Results agree with experiment rather satisfactorily in view of the simple assumption and crude approximations.